Inspectoratul Şcolar al Judeţului Buzău

Societatea de Ştiinţe Matematice Filiala Buzău

Olimpiada de matematică
faza locală
21 februarie 2016

Clasa a IX-a

1. a) Daţi un exemplu de numere iraţionale a, b, astfel încât numerele $a+b$ şi ab să fie numere raţionale nenule.
   b) Fie a, b numere reale. Arătaţi că există un număr iraţional c astfel încât numerele $a + c$ şi $b + c$ să fie iraţionale.

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu S_n suma primilor n termeni. Fie p, q numere naturale nenule, diferite. Ştiind că $S_p = q$ şi $S_q = p$, calculaţi S_{p+q}.

3. Vectorii $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}$ au lungimile egale şi suma zero. Arătaţi că sunt doi câte doi vectori opuşi.

4. O dreaptă care trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC intersectează laturile AB şi AC în punctele M şi N. Arătaţi că
$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{AN}{NC} \geq 4.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Buzău

Societatea de Ştiinţe Matematice Filiala Buzău

Olimpiada de matematică
faza locală
21 februarie 2016
Clasa a X-a

1. Fie a, b, c numere pozitive, diferite de 1. Notăm

$$x = \log_a bc, \quad y = \log_b ac, \quad z = \log_c ab.$$

Arătaţi că

$$x + y + z + 2 = xyz.$$

2. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}.$$

3. Să se arate că nu există funcţii injective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$f\left(3^x\right) + f\left(5^x\right) = 8,$$

pentru orice x real.

4. Fie u, v, w numere complexe astfel ca

$$u + v + w = u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Arătaţi că $|u| = |v| = |w|$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Buzău

Societatea de Ştiinţe Matematice Filiala Buzău

Olimpiada de matematică
faza locală
21 februarie 2016

Clasa a XI-a

1. a) Fie $A \in M_{3,1}(\mathbb{C})$. Arătaţi că $\det(AA^t) = 0$.
   b) Fie $B \in M_{3,2}(\mathbb{C})$. Arătaţi că $\det(BB^t) = 0$.
   c) Fie $C \in M_{3,3}(\mathbb{C})$. Arătaţi că $\det(C - C^t) = 0$.

2. Se consideră şirul definit astfel: $x_1 = 1$,
$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2x_n},$$
pentru orice n.
a) Aflaţi limita şirului.
b) Calculaţi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

3. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, astfel încât $2A+3B = 6AB$. Arătaţi că $AB = BA$.

4. Arătaţi că
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Buzău

Societatea de Ştiinţe Matematice Filiala Buzău

Olimpiada de matematică
faza locală
21 februarie 2016

Clasa a XII-a

1. Calculaţi
$$\int \left(3x^{10} + 2x^7\right) \sqrt[3]{x^3 + 1} dx.$$

2. Pe o mulţime M este definită o lege de compoziţie asociativă, cu proprie-tatea
$$(xy)^{2016} = yx,$$
pentru orice x, y. Arătaţi că legea este comutativă.

3. Arătaţi că dacă integrala
$$\int_0^a \cos^3(\pi x + \pi t)\, dt$$
nu depinde de $x \in \mathbb{R}$, atunci a este un număr întreg par.

4. Fie G un grup finit. Arătaţi că pentru orice elemente x, y din G are loc
$$\operatorname{ord}(xy) = \operatorname{ord}(yx).$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.